Probléme : Séries numériques.

⋆⋆⋆

1 Partie I : Étude de $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Rappeler l'énoncé d'un théorème (y compris l'évaluation du reste) permettant de montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^\star$.

   (b) À l'aide d'une suite géométrique montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx\,.$$

2. (a) Par intégration par parties , montrer qu'il existe un entier $\beta \in \mathbb{N}^*$ et un réel k différent de 0 tel que :

$$R_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\beta} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)\,.$$

   (b) En déduire la nature de la série de terme général R_n .

3. Déterminer la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n$.

2 Partie II : Étude de $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = L + 2\,.$$

   (b) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent quand n tend vers l'infini .

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

   (a) Étudier la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que v_n équivaut à $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini .

   (b) Déterminer un équivalent de $v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ; en déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

3. (a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

   (b) Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n} .

   (c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\,.$$

   Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .

3 Partie III : Étude de $q_n(x) = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^x},\ x \in]0,+\infty[\,,\ n \in \mathbb{N}$.

On rappelle que la fonction gamma est définie par, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\,.$$

1. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,, \forall p \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-pt} dt\ .$$
2. Vérifier que q_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :
$$q_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} dt\ .$$
3. En déduire que la série de terme général $q_n(x)$ converge , et mettre sa somme sous forme intégrale .
4. Retrouver le résultat de la question I 3) .

4 Partie IV : Étude de $x_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)\,,\ n \in \mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe , décroissante sur $]0,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$.

1. (a) Donner un exemple d'une telle fonction f .
   (b) Montrer que x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \Big(f(p) - f(p+1) \Big)$$
   et en déduire que la série $\sum x_n$ est convergente .
3. On suppose de plus que $f(p)$ est équivalent à $f(p+1)$ lorsque p tend vers l'infini . Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers l'infini .

5 Partie V : Étude de $q_0(x)$.

1. Montrer que q_0 est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que q_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Énoncer avec précision le théorème utilisé.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} q_0(x)$.
4. Déduire du IV 2) que q_0 admet un prolongement continu à $[0,+\infty[$ encore noté q_0 .
5. (a) Montrer que :
$$\forall x \in [0,+\infty[\ ,\quad q_0(x) = q_0(0) + \frac{x}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^{x+1}}\ .$$
   (b) En déduire que q_0 est dérivable en 0 et déterminer $q_0'(0)$ en fonction de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.
6. Déterminer $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.